GAPS 理論とリーマン予想の関連

＝リーマン予想不成立という結論＝

2024/11/13

新実祥悟

リーマン予想とは端的に言って「リーマンゼータ関数は、その実部が 1/2 以外では零にはならない」というものです。

私がリーマン予想に興味を持ったきっかけはＮＨＫ特集【プレミアムカフェ／シリーズ数学の魔力／素数の魔力にとらわれた人々／リーマン予想（2009 年）／協力・黒川信重、小川信也、赤塚広隆、日本電子計算】の再放送を見たからです。番組中でのリーマン予想の説明は「ゼータ関数の非自明なゼロ点は全て一直線上にあるはずだ」というものです。特に興味を引いたのは 1972 年にヒュー・モンゴメリー（ミシガン大学教授／2009 年当時）とフリーマン・ダイソン（プリンストン高等研究所名誉教授／2009 年当時）がプリンストン高等研究所で立ち話をしたというワン・シーンで、そこで提示されたのが

$$\left(\frac{\sin \ \pi u}{\pi u}\right)^2 \qquad \cdots [1]$$

という式でした。これはヒュー・モンゴメリーによるとリーマンゼータ関数のゼロ点の間隔を表わす式であり、フリーマン・ダイソンによればウランなどの重い原子核のエネルギーレベルの間隔を表わす式であるというものです。

追い打ちをかけたのが別のワン・シーンに数学界の大御所アラン・コンヌ（コレージュ・ド・フランス教授／2009 年当時）が登場し、リーマン予想は非可換幾何学に関連すると述べたものです。

式[１]のカッコ内の式は、GAPS 理論における重力定数を補正した場合に得られる式 G_j の一部を構成していました。それは私の研究ノート「物質の自己エリオン場補正」に示した

$$G_j = i\ \frac{e^{-i\varphi}}{\phi v} = \frac{(-\sin\phi + i\cos\phi)}{\phi v} \qquad \cdots [2]$$

の内の

$$\frac{\sin\phi}{\phi}$$

に相当します。もちろん $\phi = w\tau$ でありこれは πu に置き換えられます。

そして GAPS 理論はまさしくアラン・コンヌの言葉通り非可換幾何学の範疇にあります。

ほとんど数論をやってこなかった私にとっては、息抜きで見ていた番組がとても示唆に富むものであったということです。結局、リーマン予想の入門書として「リーマン予想とはなにか」【中村亨／ブルーバックス／B1821／講談社】を何度も読み返すことになりました。

1　ゼータ関数とリーマン予想

リーマンのゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{P:素数} (1-p^{-s})^{-1} \quad \cdots[3]$$

であり、リーマン予想は、非自明な場合でζ(s) = 0 が成り立つのは s = 1/2 + it (t は実数) の場合だけであろう、というものです【黒川重信／超リーマン予想／現代数学社／2023】。一般的には式[３]を変換して

$$\zeta(s) = \frac{\displaystyle\int_C \frac{z^{s-1}}{e^{z}-1}\,dz}{(e^{2\pi is}-1)\ \Gamma(s)} \quad \cdots[4]$$

から非自明な零点ζ(s) = 0 を探索します。ここで分母のｅの肩に付いた２πｉｓはｚを置き換えたものです。２πｉｓ＝ｚ。

これまでの探索の結果は全ての非自明な零点は実部が 1/2 で､虚部のｔが得られています。しかし、リーマン予想が証明されたわけではありません。

2　ガンマ関数と GAPS 基礎関数

以下ではリーマンのガンマ関数を書き下ろします。

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\,dt \quad \cdots[5]$$

リーマン予想を追求するにあたり、上記のガンマ関数はもちろん、ゼータ関数全体として研究し尽くされています。しかし式中の変数ｔ、ｓ、ｚが交錯しているため、単純に解が得られません。

これは GAPS 理論の基礎関数[６]にある変数ω、σ、τの交錯に近いものがあります。そこで GAPS 理論では考える次元数を拡大し、計算の深度を深めました。いわゆる縦計算、横計算というものです。これは非可換幾何学の範疇で捉えなおしたものです。

$$F(\theta_j) = \pm\omega_j \exp(\pm{}^{R}_{I}\ \sigma_j \tau) \cos\ \omega_j \tau$$ （R は実、I は虚。j は次元）・・・[６]

ゼータ関数がどのような機構の中で導出されたか分かりませんが、GAPS 理論の場合の角度θのようにｔ、ｓ、ｚの中にも根源的な変数が隠れているのではないかと思われます。つまり、リーマンゼータ関数はリーマン幾何学の範疇には収まっておらず、非可換幾何学を適用すべきだと見抜いたのがアラン・コンヌだったのではないでしょうか。

すると、宇宙は非可換幾何学で語られるもので、根源的な変数は角度θであり、そこには GAPS 理論の基礎関数もゼータ関数も存在すると言えます。

3 非可換幾何学の範疇で統一される関数

注目すべき点は、ガンマ関数[５]の内の非積分関数

$\Gamma(s) = t^{s-1} e^{-t}$ ・・・[７]

と、GAPS 基礎関数[６]の内の複素関数部分

$F_i(\theta_j) = \pm\omega_j \exp(\pm i\sigma_j\tau)\cos\ \omega_j\tau$ （i は虚数） ・・・[８]

が、非可換幾何学の範疇で同一だと言えるかどうかです。

式[７]は角度 θ を根源的な変数として組み立てなおせば、式[８]と同様に、次元を交換することができない非可換な６次元複素空間内に存在する関数とすることができます。ただし、このままでは式[７]と式[８]が同一だとは言えません。

以下、論理展開をします。まず、空間が非可換であるため次元は一つの複素平面に固定します*(1)。そのため記号 j は省略します。そして、θ が $\pi/4$ の場合だけ考えます。すると $\omega\tau=\sigma\tau$ となります。なぜなら $\omega = w\sin\theta$ で $\sigma = w\cos\theta$ だからです。ただし、記号は自在に使い分けます。ここで、$t = i\sigma\tau$ とし、なおかつ $\tau = 1$ とします。そして、ω をネピア数 e と考えます。また、$s = i\omega\tau + 2$ とします。すると $e^{-t} = e^{-i\sigma\tau}$ になり、そして $t^{s-1} = i(\sigma\tau)^{s-1} = i\sigma^{s-1} = i\sigma^{i\omega\tau+1} = i\sigma^{i\omega\tau}\sigma = i\omega^{i\omega\tau}\omega = ie^{i\omega\tau}\omega = i\omega(\cos\omega\tau + i\sin\omega\tau)$ となります。以上をまとめると

$t^{s-1}e^{-t} = \omega(i\cos\omega\tau,\ -\sin\omega\tau)e^{-i\sigma\tau}$ ・・・[９]

となります。これは GAPS 基礎関数そのものです。式[９]を τ で積分すると

$$\Gamma(s) = \int \omega(i\cos\omega\tau,\ -\sin\omega\tau)e^{-i\sigma\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{\sin^2\theta(i\sin\omega\tau,\ \cos\omega\tau)e^{-i\sigma\tau}}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$= \infty$$ ・・・[10]

になります。

リーマンゼータ関数の内、ガンマ関数以外は有意な値を取りますので

$\zeta(s) = 0$ ・・・[11]

が成り立ちます。この場合の s は

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$ ・・・[12]

の条件のもとで

$s = ie + 2$ （ ネピア数 $e = 2.71828\cdots$ ） ・・・[13]

となります。

＊(1) 正確に言うと GAPS 理論における複素空間は $C = (g_1, g_2, g_3)$、$g_1 = (x, ix)$、$g_2 = (y, iy)$、$g_3 = (z, iz)$で表わされます。また、g_j の実軸と虚軸が接しているとも接していないとも捉えることができ、明確に接していることにはならず、リーマン面を構成していません（図 1）。

4　結論

GAPS 理論における非可換幾何の範疇という狭義の意味においてリーマン予想は成り立っておらず、広義の意味においてもリーマン予想は不成立です。

図 1

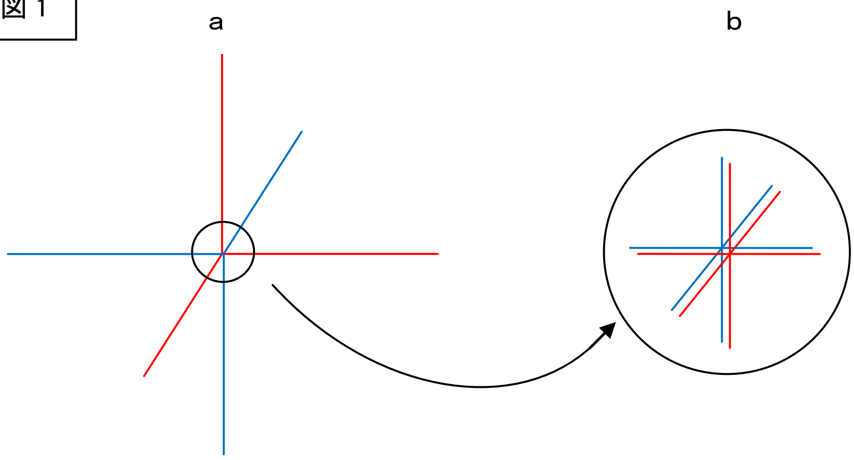

図 1aの赤線を3次元実空間とし、青線を 3 次元虚空間とします。bはaの原点付近を拡大したものです。実空間と虚空間の原点が一致していないことで GAP 空間（複素空間　3＋3次元）が構成されています。しかし、実空間のあらゆる所に虚空間が存在しており、そのため演算する場合には実軸と虚軸は接していると見ることもできます。

5　予想

感じたことを想像で言いますが、GAPS 理論は、幾何学の範疇では宇宙際タイヒミューラー理論[望月新一／京都大学]にぴったりと収まっているのではないだろうか。

Niimi Shogo